函数展开成傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x \text{ 是连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{当 } x \text{ 不是连续点时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

10.6　一般周期函数的傅里叶级数

10.6.1　周期为 $2l$ 的周期函数的 傅里叶级数

10.6.2　傅里叶级数的复数形式

10.6.1 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

定理10.6.1 设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开 式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中系数 a_n, b_n为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

定理10.6.1 设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开 式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

证明 令$z=\frac{\pi x}{l}$, $-l\le x\le l\Rightarrow -\pi\le z\le\pi$,

$f(x)=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$ $\because F(z)$以2π为周期,

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$f(x)=F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

令 $z=\frac{\pi x}{l}, \quad dz=\frac{\pi}{l}dx,$

$$\therefore a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

注 (1) 如果 $f(x)$ 为奇函数， 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 b_n为 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$

$(n=1,2,\cdots)$

(2) 如果$f(x)$为偶函数，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 a_n为 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

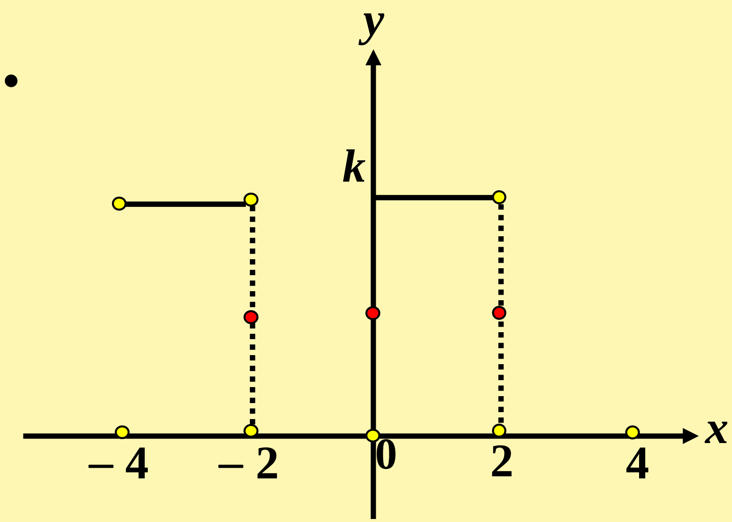
$(n=0,1,2,\cdots)$

例1 设$f(x)$是周期为4的周期函数,它在$[-2,2)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$, 将其展成傅立叶级数.

解 $\because l=2$, 满足狄利克雷充分条件.

在不连续点处$x=0,\pm 2,\pm 4,\ldots$

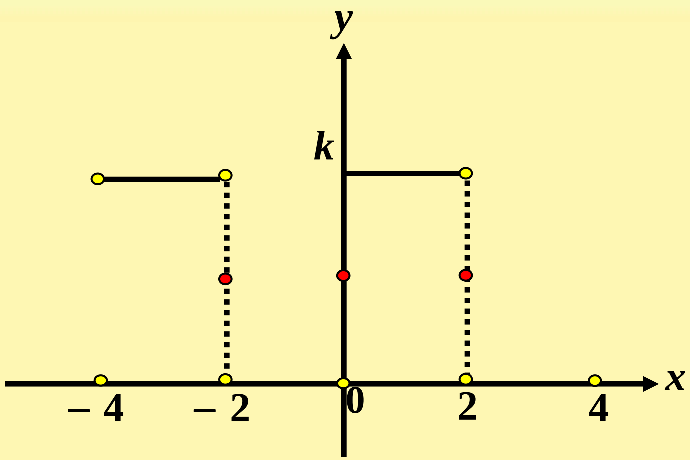
级数收敛到$\dfrac{k+0}{2}=\dfrac{k}{2}$,



$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx \quad =k,$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$$



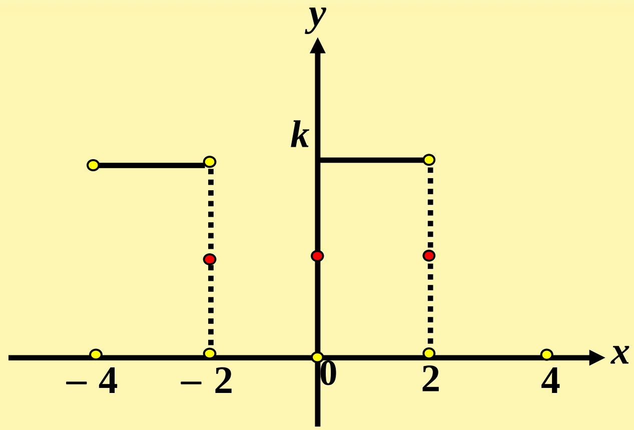
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}x dx \quad = 0, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x dx$$

$$=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{k}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$$



$$a_0 = k \quad a_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq 0,\pm 2,\pm 4,\cdots)$$

例2　将$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数。

解　由于$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$为偶函数，所以

$$b_n=0, n=1,2\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=2\int_0^1(2+x)dx=5$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx$$

$$=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\qquad (n=1,2,3\cdots)$$

例2　将$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数。

$$a_0=5 \qquad a_n=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} \qquad (n=1,2,3\cdots)$$

$$b_n=0, \quad n=1,2\cdots$$

由于对$f(x)$作周期为2的周期延拓得定义在（$-\infty,\infty$）上的周期函数$F(x)$处处连续，故 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为：

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \qquad (-1\le x\le 1)$$

将定义在 $[0, l]$ ($(0, l)$) 上的函数展成正弦级数或余弦级数

方法：要将定义在[0，l]（$(0, l)$）上的函数 $f(x)$ 展成正弦级数（余弦级数），须先将 $f(x)$ 进行奇延拓（偶延拓），再利用奇偶函数的傅里叶系数公式计算傅里叶系数，最后写出 $f(x)$ 的傅里叶级数并讨论收敛性

例3　将函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}$

展开成正弦级数, 余弦级数。

解　(1) $f(x)$ 是定义在(0，2)上的函数，要将它展开成正弦级数，必须对 $f(x)$ 进行奇延拓，可补充 $F(0)=0$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=[\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

例3　将函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}$

展开成正弦级数, 余弦级数。

$$b_n=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(-1)^k 8}{(2k+1)^2\pi^2}, n=2k+1, k=0,1,2,\cdots \\ 0, n=2,4,6,\cdots. \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2} \qquad （0<x<2）$$

例3 函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}$展开成余弦级数。

(2) $f(x)$ 是定义在 (0，2)上的函数，要将它展开成余弦级数，必须对 $f(x)$ 进行偶延拓，可令 $F(0)=0$

注意：$f(x)$先作偶延拓再做周期延拓后，最小正周期为2，但我们仍取$l=2$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=[\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=1$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx,$$

例3　将函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}$

展开成正弦级数, 余弦级数。

$$a_0=1$$

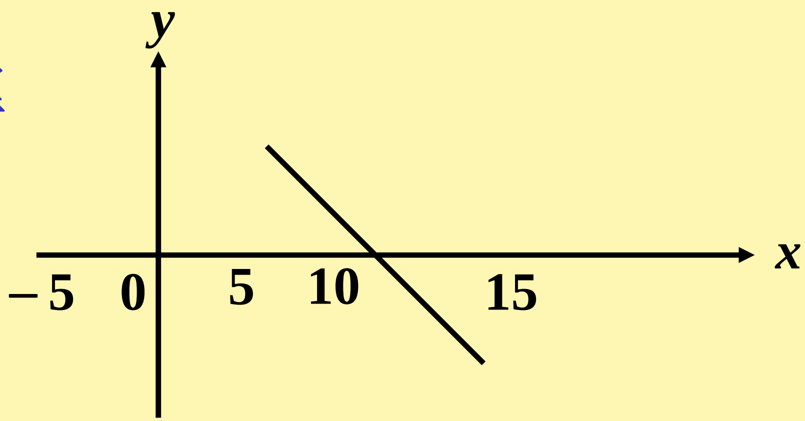
$$a_n=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

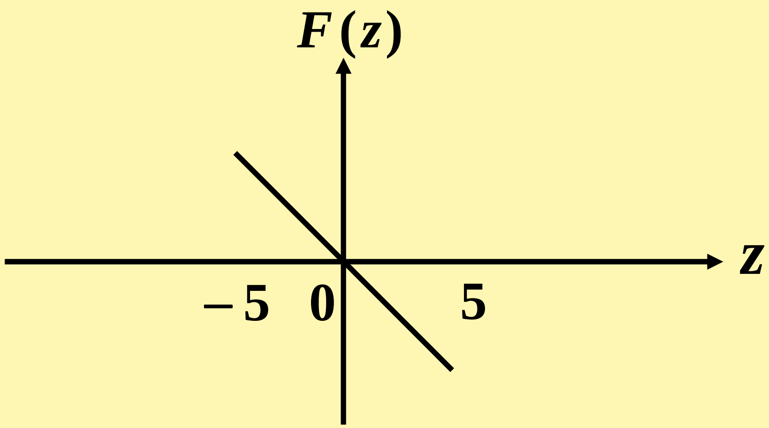
$$=\begin{cases} \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}, n=2k+1, k=0,1,2,\cdots \\ 0, n=2,4,6,\cdots. \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}\quad (0<x<2)$$

例4 将函数 $f(x)=10-x\,(5<x<15)$ 展开成傅立叶级数.

解





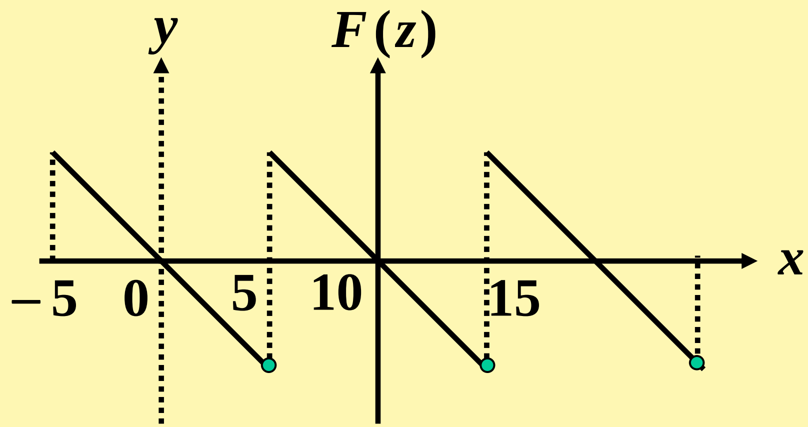
作变量代换 $z=x-10,\quad 5<x<15 \Rightarrow -5<z<5,$

$f(x)=f(z+10)=-z=F(z),$

补充函数 $F(z)=-z \quad (-5<z<5)$ 的定义,

令 $F(-5)=5,\quad$ 然后将 $F(z)$ 作周期延拓 $(T=10)$

例4 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展开成傅立叶级数.



作变量代换 $z=x-10$,

$F(z)=-z \quad (-5<z<5)$

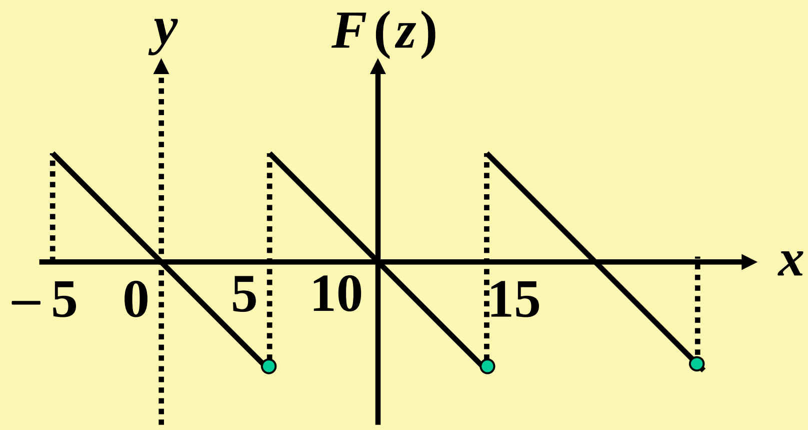
令 $F(-5)=5$, 然后将 $F(z)$ 作周期延拓 $(T=10)$

这拓广的周期函数满足 收敛定理的条件,

且展开式在 $(-5,5)$ 内收敛于 $F(z)$.

$$a_n=0, \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

作变量代换 $z = x - 10, \quad F(z) = -z \quad (-5 < z < 5)$



$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 (-z)\sin\frac{n\pi z}{5}dz$$

$$= (-1)^n \frac{10}{n\pi}, \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$F(z) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5}, \qquad (-5 < z < 5)$$

$$f(x) = 10 - x = -z = F(z)$$

$$= \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin[\frac{n\pi}{5}(x-10)] = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x.$$

$$(5 < x < 15)$$